**УКРАЇНА** (19) **UA** (11) **67930** (13) **U**

(51) МПК (2012.01)
**G01H 11/00**

**ДЕРЖАВНА СЛУЖБА ІНТЕЛЕКТУАЛЬНОЇ ВЛАСНОСТІ УКРАЇНИ**

# (12) ОПИС ДО ПАТЕНТУ НА КОРИСНУ МОДЕЛЬ

**(21)** Номер заявки: **u 2011 09703**

**(22)** Дата подання заявки: **03.08.2011**

**(24)** Дата, з якої є чинними права на корисну модель: **12.03.2012**

**(46)** Публікація відомостей про видачу патенту: **12.03.2012, Бюл.№ 5**

**(72)** Винахідник(и):
**Пузько Ігор Данилович (UA)**

**(73)** Власник(и):
**СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**,
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007 (UA)

## (54) СПОСІБ ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ НЕЛІНІЙНОЇ СИЛЬНО ДИСИПАТИВНОЇ КОЛИВАЛЬНОЇ СИСТЕМИ

**(57)** Реферат:

Спосіб визначення параметрів нелінійної сильно дисипативної коливальної системи, за яким задають перше початкове і перше кінцеве значення амплітуди вільних затухаючих коливань, проводять вимір першого часового інтервалу і числа циклів в цьому інтервалі при зміні амплітуди вільних затухаючих коливань від першого початкового до першого кінцевого значення, далі задають друге початкове і друге кінцеве значення амплітуди вільних затухаючих коливань і проводять вимір другого часового інтервалу і числа циклів коливань в цьому часовому інтервалі при зміні амплітуди вільних затухаючих коливань від другого початкового до другого кінцевого значення. Новим в алгоритмі є проведення технологічних операцій формування шести груп режимів, кожну із яких формують із "N-1" режимів вільних затухаючих коливань, причому першу і другу групи режимів формують без зміни інерційності нелінійної коливальної системи, третю і четверту групи режимів формують після першої зміни інерційності нелінійної коливальної системи, п'яту і шосту групи режимів формують після другої зміни інерційності нелінійної коливальної системи, в першій, третій і п'ятій групах режимів вільних затухаючих коливань вимірюють і реєструють першу, третю і п'яту групи часових інтервалів і чисел циклів (періодів) коливань відповідно множини "N-1" при зміні амплітуди вільних затухаючих коливань від першого початкового значення до першого кінцевого значення, в другій, четвертій і шостій групах режимів вільних затухаючих коливань вимірюють і реєструють другу, четверту і шосту групи часових інтервалів і чисел циклів (періодів) коливань відповідно множини "N-1" при зміні амплітуди вільних затухаючих коливань від другого початкового значення до другого кінцевого значення.

UA 67930 U

Корисна модель належить до області машинобудівної, авіаційної і ракетно-космічної техніки, а саме до способів визначення параметрів вільних коливань нелінійних дисипативних коливальних систем із кінцевим числом ступенів вільності, і може бути застосована, зокрема, при визначенні моментів інерції за допомогою механічних коливальних систем.

Відомий спосіб визначення параметрів нелінійної дисипативної коливальної системи, за яким задають перше початкове і перше кінцеве значення амплітуди вільних коливань, вимірюють перший і другий часові інтервали зміни амплітуди коливань, вимір першого часового інтервалу і числа циклів коливань в цьому часовому інтервалі проводять при зміні амплітуди вільних коливань від першого початкового значення до першого кінцевого значення, потім задають друге початкове і друге кінцеве значення амплітуди вільних коливань, вимір другого часового інтервалу і числа циклів коливань в цьому часовому інтервалі проводять при зміні амплітуди вільних коливань від її другого початкового значення до другого кінцевого значення, після чого змінюють інерційність нелінійної дисипативної коливальної системи і проводять вищевказану сукупність операцій по виміру першого і другого часових інтервалів і чисел циклів в кожному часовому інтервалі при зміні амплітуди вільних коливань від її першого початкового значення до першого кінцевого значення, від другого початкового значення до другого кінцевого значення відповідно, а визначення параметра нелінійної дисипативної коливальної системи проводять при урахуванні часових інтервалів і чисел циклів вільних коливань (Ав. св. СССР № 1703990, МПК G01H11/00, 1992).

Недоліком відомого способу визначення параметрів нелінійної дисипативної коливальної системи є обмежені функціональні можливості цієї системи, що пояснюється визначенням тільки одного параметра коливань слабко дисипативної нелінійної коливальної системи, що в свою чергу призводить до неможливості визначення множини параметрів сильно дисипативної нелінійної коливальної системи.

За прототип вибрано спосіб визначення параметрів нелінійної сильно дисипативної коливальної системи (патент України № 45033, МПК G01H 11/00, 2009 р.), по якому задають перше початкове і перше кінцеве значення амплітуди затухаючих коливань нелінійної дисипативної коливальної системи, проводять вимір першого часового інтервалу і числа циклів в цьому інтервалі при зміні амплітуди затухаючих коливань від першого початкового до першого кінцевого значення, далі задають друге початкове і друге кінцеве значення амплітуди затухаючих коливань і проводять вимір другого часового інтервалу і числа циклів в цьому часовому інтервалі при зміні амплітуди затухаючих коливань від другого початкового до другого кінцевого значення, потім один раз змінюють інерційність нелінійної дисипативної коливальної системи і проводять вищевказану сукупність операцій по визначенню першого і другого часових інтервалів і числа циклів в цих інтервалах при зміні амплітуди коливань від її першого початкового значення до першого кінцевого значення, від другого початкового значення до другого кінцевого значення відповідно і додатково другий раз змінюють інерційність нелінійної дисипативної коливальної системи і проводять вищевказану сукупність операцій по визначенню першого і другого часових інтервалів і чисел циклів в цих часових інтервалах при зміні амплітуди коливань від її першого початкового значення до першого кінцевого значення, від другого початкового значення до другого кінцевого значення відповідно, а частоту вільних коливань лінійної дисипативної породжувальної системи і вільних коливань лінійної консервативної породжувальної системи "$\omega_1$" та " $\omega_0$", а також масу "m" коливальної системи, коефіцієнт "c" жорсткості, коефіцієнт "h" демпфування, коефіцієнт "b" опору визначають із співвідношень відповідно:

$$\omega_1 = 2\pi \frac{\left[\Delta_3 t(n_2 - n_4) - \Delta_4 t(n_1 - n_3)\right]}{\left(\Delta_2 t \Delta_3 t - \Delta_1 t \Delta_4 t\right)},$$

$$m = \frac{2\Delta_1 m \Delta_2 m\left(\overline{\omega}_1^2 - \overline{\overline{\omega}}_1^2\right)}{\left[\Delta_2 m\left(\omega_1^2 - \overline{\omega}_1^2\right) - \Delta_1 m\left(\left(\omega_1^2 - \overline{\overline{\omega}}_1^2\right)\right)\right]},$$

$$C = \frac{m^2}{\Delta_1 m}\left[\overline{\omega}_1^2\left(1 + \frac{\Delta_1 m}{m}\right)^2 - \omega_1^2\right],$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{m}} = \sqrt{\frac{m}{\Delta_1 m}\left[\overline{\omega}_1^2\left(1 + \frac{\Delta_1 m}{m}\right)^2 - \omega_1^2\right]},$$

$$h = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_1^2} = \sqrt{\frac{m}{\Delta_1 m}\left[\overline{\omega}_1^2\left(1 + \frac{\Delta_1 m}{m}\right)^2 - \omega_1^2\right]},$$

де $\omega_1 = \sqrt{cm^{-1} - h^2}$ , $\overline{\omega}_1 = \sqrt{c(m + \Delta_1 m)^{-1} - \overline{h}^2}$ , $\overline{\overline{\omega}}_1 = \sqrt{c(m + \Delta_2 m)^{-1} - \overline{\overline{h}}^2}$ , $\Delta_1 m$, $\Delta_2 m$ ($\Delta_1 m \neq \Delta_2 m$, $\Delta_1 m \ll \Delta_2 m$, $\Delta_1 m \ll m$, $\Delta_2 m \ll m$) - перша і друга додаткові маси;

$h = \frac{b}{2m}$ , $\overline{h} = \frac{b}{2(m + \Delta_1 m)}$ , $\overline{\overline{h}} = \frac{b}{2(m + \Delta_2 m)}$ ,

$n_1$, $n_2$ - числа циклів затухаючих коливань маси "m" при зміні амплітуди затухаючих коливань від першого початкового значення $X_{a1}$ до першого кінцевого значення $X_{a2}$, від другого початкового значення $X_{a3}$ до другого кінцевого значення $X_{a4}$ відповідно;

$\Delta_1 t$, $\Delta_2 t$ - часові інтервали, що відповідають числам $n_1$, $n_2$ циклів коливань;

$n_3$, $n_4$ - числа циклів затухаючих коливань маси ($m + \Delta_1 m$) при зміні амплітуди затухаючих коливань від першого початкового значення $X_{a1}$ до першого кінцевого значення $X_{a2}$, від другого початкового значення $X_{a3}$ до другого кінцевого значення $X_{a4}$ відповідно;

$\Delta_3 t$, $\Delta_4 t$ - часові інтервали, що відповідають числам $n_3$, $n_4$ циклів коливань;

$n_5$, $n_6$ - числа циклів затухаючих коливань маси ($m + \Delta_2 m$) при зміні амплітуди затухаючих коливань від першого початкового значення $X_{a1}$ до першого кінцевого значення $X_{a2}$, від другого початкового значення $X_{a3}$ до другого кінцевого значення $X_{a4}$ відповідно;

$\Delta_5 t$, $\Delta_6 t$ - часові інтервали, що відповідають числам $n_5$, $n_6$ циклів коливань відповідно.

Недоліком відомого способу є недостатня точність визначення параметрів, що пояснюється неврахуванням випадкових похибок виміру, фіксації та запам'ятовування величин часових інтервалів і чисел циклів (періодів) коливань в цих часових інтервалах при зміні амплітуди вільних коливань від її першого початкового до першого кінцевого значення, від другого початкового до другого кінцевого значення і неврахуванням випадкових помилок при аналогічних вимірах, фіксаціях та запам'ятовуванні відповідних часових інтервалів і чисел циклів (періодів) коливань при першій і другій змінах інерційності нелінійної дисипативної коливальної системи, а також недостатнім по множині інформаційним масивом даних по часових інтервалах і числах циклів коливань для формування регресійних залежностей і застосування метода найменших квадратів для зменшення впливу випадкових похибок при визначенні оцінок параметрів шляхом усереднення.

В основу корисної моделі поставлена задача удосконалення способу визначення параметрів нелінійної сильно дисипативної коливальної системи за рахунок підвищення точності визначення параметрів шляхом врахування випадкових похибок при проведенні вимірювань, фіксації та запам'ятовуванні множини часових інтервалів, числа циклів (періодів) коливань в кожному часовому інтервалі, а також формуванні достатнього по множині інформаційного масиву часових інтервалів і чисел циклів коливань для реалізації можливості формування регресійної залежності і застосування метода найменших квадратів, що і забезпечує підвищення точності визначення оцінок інерційно - жорсткіших і дисипативних параметрів.

Поставлена задача вирішується тим, що в способі визначення параметрів нелінійної сильно дисипативної коливальної системи, по якому задають перше початкове і перше кінцеве значення амплітуди вільних затухаючих коливань нелінійної сильно дисипативної коливальної системи, проводять вимір першого часового інтервалу і числа циклів в цьому інтервалі при зміні амплітуди вільних затухаючих коливань від першого початкового до першого кінцевого значення, далі задають друге початкове і друге кінцеве значення амплітуди вільних затухаючих коливань і проводять вимір другого часового інтервалу і числа циклів коливань в цьому часовому інтервалі при зміні амплітуди вільних затухаючих коливань від другого початкового до другого кінцевого значення, потім перший раз змінюють інерційність нелінійної сильно дисипативної коливальної системи і проводять вищевказану сукупність операцій по визначенню третього і четвертого часових інтервалів і числа циклів (періодів) коливань в цих часових інтервалах при зміні амплітуди вільних затухаючих коливань від її першого початкового значення до першого кінцевого значення, від другого початкового значення до другого кінцевого значення відповідно, далі другий раз змінюють інерційність нелінійної сильно дисипативної коливальної системи і проводять вищевказану сукупність операцій по визначенню п'ятого і шостого часових інтервалів і числа циклів (періодів) коливань в цих часових інтервалах при зміні амплітуди вільних затухаючих коливань від її першого початкового значення до першого кінцевого значення, від другого початкового значення до другого кінцевого значення відповідно, згідно із корисною моделлю, додатково формують першу групу «N-1» режимів вільних затухаючих коливань сильно дисипативної коливальної системи, в першій групі «N-1» режимів задають перше початкове і перше кінцеве значення амплітуди вільних затухаючих коливань нелінійної сильно дисипативної коливальної системи і проводять вимір і фіксацію множини «N-1» перших часових інтервалів і числа «N-1» циклів коливань в цих часових інтервалах при зміні амплітуди вільних затухаючих коливань від першого початкового до першого кінцевого значення, окрім цього додатково формують другу групу «N-1» режимів вільних затухаючих коливань, в другій групі «N-1» режимів задають друге початкове і друге кінцеве значення амплітуди вільних затухаючих коливань нелінійної сильно дисипативної коливальної системи і проводять вимір і фіксацію множини «N-1» других часових інтервалів і числа «N-1» циклів коливань в цих часових інтервалах при зміні амплітуди вільних затухаючих коливань від її другого початкового значення до другого кінцевого значення, після першої зміни інерційності нелінійної сильно дисипативної коливальної системи формують третю групу «N-1» режимів вільних затухаючих коливань, в третій групі «N-1» режимів задають перше початкове і перше кінцеве значення амплітуди вільних затухаючих коливань нелінійної сильно дисипативної коливальної системи і проводять вимір і фіксацію множини «N-1» третіх часових інтервалів і числа «N-1» циклів коливань в цих часових інтервалах при зміні амплітуди вільних затухаючих коливань від її першого початкового значення до першого кінцевого значення, після першої зміни інерційності нелінійної сильно дисипативної коливальної системи формують четверту групу «N-1» режимів вільних затухаючих коливань, в четвертій групі «N-1» режимів задають друге початкове і друге кінцеве значення амплітуди вільних затухаючих коливань нелінійної сильно дисипативної коливальної системи і проводять вимір і фіксацію множини «N-1» четвертих часових інтервалів і числа «N-1» циклів коливань в цих часових інтервалах при зміні амплітуди вільних затухаючих коливань від її другого початкового значення до другого кінцевого значення, після другої зміни інерційності нелінійної сильно дисипативної коливальної системи формують п'яту групу «N-1» режимів вільних затухаючих коливань, в п'ятій групі «N-1» режимів задають перше початкове і перше кінцеве значення амплітуди вільних затухаючих коливань нелінійної сильно дисипативної коливальної системи і проводять вимір і фіксацію множини «N-1» п'ятих часових інтервалів і числа «N-1» циклів коливань в цих часових інтервалах при зміні амплітуди вільних затухаючих коливань від її першого початкового значення до першого кінцевого значення, після другої зміни інерційності нелінійної сильно дисипативної коливальної системи формують шосту групу «N-1» режимів вільних затухаючих коливань, в шостій групі «N-1» режимів задають друге початкове і друге кінцеве значення амплітуди вільних затухаючих коливань нелінійної сильно дисипативної коливальної системи і проводять вимір і фіксацію множини «N-1» шостих часових інтервалів і числа «N-1» циклів коливань в цих часових інтервалах при зміні амплітуди вільних затухаючих коливань від її другого початкового значення до другого кінцевого значення, а оцінки інерційно-жорсткісних і дисипативних параметрів нелінійної сильно дисипативної коливальної системи визначають із співвідношень:

$$\hat{m} = \frac{\Delta_1 m \Delta_2 m\left(\hat{\bar{\bar{\omega}}}_1^2 - \hat{\bar{\omega}}_1^2\right)}{\left(\hat{\bar{\omega}}_1^2 \Delta_2 m - \hat{\bar{\bar{\omega}}}_1^2 \Delta_1 m\right)},$$

$$\hat{c} = \frac{\hat{m}^2 \hat{\bar{\omega}}_1^2}{\Delta_1 m}\left(1 + \frac{\Delta_1 m}{\hat{m}}\right) \text{ або } \hat{c} = \frac{\hat{m}^2 \hat{\bar{\bar{\omega}}}_1^2}{\Delta_2 m}\left(1 + \frac{\Delta_2 m}{\hat{m}}\right),$$

$$\hat{\omega}_0^2 = \frac{\hat{c}}{\hat{m}} = \frac{\hat{m}\hat{\bar{\omega}}_1^2}{\Delta_1 m}\left(1 + \frac{\Delta_1 m}{\hat{m}}\right) \text{ або } \hat{\omega}_0^2 = \frac{\hat{m}\hat{\bar{\bar{\omega}}}_1^2}{\Delta_2 m}\left(1 + \frac{\Delta_2 m}{\hat{m}}\right);$$

$$\hat{b} = 2\hat{m}\sqrt{\hat{\omega}_0^2 - \hat{\omega}_1^2} \text{ або } \hat{b} = 2(\hat{m} + \Delta_1 m)\sqrt{\hat{\omega}_0^2 - \hat{\bar{\omega}}_1^2} \text{ або } \hat{b} = 2(\hat{m} + \Delta_2 m)\sqrt{\hat{\omega}_0^2 - \hat{\bar{\bar{\omega}}}_1^2};$$

$$\hat{h} = \frac{\hat{b}}{2\hat{m}} = \sqrt{\hat{\omega}_0^2 - \hat{\omega}_1^2} \text{ або } \hat{\bar{h}} = \frac{\hat{b}}{2(\hat{m} + \Delta_1 m)} \text{ або } \hat{\bar{\bar{h}}} = \frac{\hat{b}}{2(\hat{m} + \Delta_2 m)};$$

де $\hat{\omega}_1 = \sqrt{\hat{c}\hat{m}^{-1} - \hat{h}^2}$, $\hat{\bar{\omega}}_1 = \sqrt{\hat{c}(\hat{m} + \Delta_1 m)^{-1} - \hat{\bar{h}}^2}$, $\hat{\bar{\bar{\omega}}}_1 = \sqrt{\hat{c}(\hat{m} + \Delta_2 m)^{-1} - \hat{\bar{\bar{h}}}^2}$,

$$\hat{\omega}_1 = 2\pi \frac{\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}^2 t\left(\sum_{i=1}^{N}n_{2i}\Delta_{2i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}t - \sum_{i=1}^{N}n_{4i}\Delta_{4i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}t\right) - \\ &-\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}^2 t\left(\sum_{i=1}^{N}n_{1i}\Delta_{1i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}t - \sum_{i=1}^{N}n_{3i}\Delta_{3i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}t\right)\end{aligned}}{\left(\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}^2 t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}^2 t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}t - \sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}^2 t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}^2 t\right)}$$

або $\left[\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}^2 t\left(\sum_{i=1}^{N}n_{2i}\Delta_{2i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}t - \sum_{i=1}^{N}n_{6i}\Delta_{6i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}t\right) - \right.$

$$\hat{\omega}_1=2\pi\frac{-\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}^2t\left(\sum_{i=1}^{N}n_{1i}\Delta_{1i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{5i}\Delta_{5i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}t\right)\Bigr]}{\left(\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}^2t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}^2t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}t-\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}^2t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}^2t\right)}$$

$$\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}^2t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}t\left(\sum_{i=1}^{N}n_{2i}\Delta_{2i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{4i}\Delta_{4i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}t\right)-$$

$$\hat{\bar{\omega}}_1=2\pi\frac{-\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}^2t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}t\left(\sum_{i=1}^{N}n_{1i}\Delta_{1i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{3i}\Delta_{3i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}t\right)}{\left(\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}^2t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}^2t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}t-\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}^2t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}^2t\right)}$$ або

$$\Bigl[\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}^2t\left(\sum_{i=1}^{N}n_{4i}\Delta_{4i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{6i}\Delta_{6i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}t\right)-$$

$$\hat{\bar{\omega}}_1=2\pi\frac{-\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}^2t\left(\sum_{i=1}^{N}n_{3i}\Delta_{3i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{5i}\Delta_{5i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}t\right)\Bigr]}{\left(\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}^2t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}^2t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}t-\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}^2t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}^2t\right)}$$

$$\Bigl[\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}^2t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}t\left(\sum_{i=1}^{N}n_{2i}\Delta_{2i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{6i}\Delta_{6i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}t\right)-$$

$$\hat{\bar{\bar{\omega}}}_1=2\pi\frac{-\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}^2t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}t\left(\sum_{i=1}^{N}n_{1i}\Delta_{1i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{5i}\Delta_{5i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}t\right)\Bigr]}{\left(\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}^2t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}^2t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}t-\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}^2t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}^2t\right)}$$ або

$$\Bigl[\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}^2t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}t\left(\sum_{i=1}^{N}n_{4i}\Delta_{4i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{6i}\Delta_{6i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}t\right)-$$

$$\hat{\bar{\bar{\omega}}}_1=2\pi\frac{-\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}^2t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}t\left(\sum_{i=1}^{N}n_{3i}\Delta_{3i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{5i}\Delta_{5i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}t\right)\Bigr]}{\left(\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}^2t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}^2t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}t-\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}^2t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}^2t\right)};$$

$\Delta_1m$, $\Delta_2m$ ($\Delta_1m \neq \Delta_2m$, $\Delta_1m \ll \hat{m}$, $\Delta_2m \ll \hat{m}$) - перша і друга додаткові маси;

$$\hat{h}=\frac{\hat{b}}{2\hat{m}},\ \hat{\bar{h}}=\frac{\hat{b}}{2(\hat{m}+\Delta_1m)},\ \hat{\bar{\bar{h}}}=\frac{\hat{b}}{2(\hat{m}+\Delta_2m)};$$

$n_{1i}$, $n_{2i}$ (i = 1,2, ..., N) - перша і друга групи чисел циклів затухаючих коливань маси "m" при зміні амплітуди затухаючих коливань від першого початкового значення $X_{a1}$ до першого кінцевого значення $X_{a2}$, від другого початкового значення $X_{a3}$ до другого кінцевого значення $X_{a4}$ відповідно;

$\Delta_{1i}t$, $\Delta_{2i}t$ - перша і друга групи часових інтервалів, що відповідають першій і другій групам чисел $n_{1i}$, $n_{2i}$ циклів коливань;

$n_{3i}$, $n_{4i}$ - третя і четверта групи чисел циклів затухаючих коливань маси ($m + \Delta_1m$) при зміні амплітуди затухаючих коливань від першого початкового значення $X_{a1}$ до першого кінцевого значення $X_{a2}$, від другого початкового значення $X_{a3}$ до другого кінцевого значення $X_{a4}$ відповідно;

$\Delta_{3i}t$, $\Delta_{4i}t$ - третя і четверта групи часових інтервалів, що відповідають третій і четвертій групам чисел $n_{3i}$, $n_{4i}$ циклів коливань;

$n_{5i}$, $n_{6i}$. - п'ята і шоста групи чисел циклів затухаючих коливань маси ($m + \Delta_2m$) при зміні амплітуди затухаючих коливань від першого початкового значення $X_{a1}$ до першого кінцевого значення $X_{a2}$, від другого початкового значення $X_{a3}$ до другого кінцевого значення $X_{a4}$ відповідно;

$\Delta_{5i}t$, $\Delta_{6i}t$ - п'ята і шоста групи часових інтервалів, що відповідають п'ятій і шостій групам чисел $n_{5i}$, $n_{6i}$ циклів коливань.

Застосування запропонованого способу оцінки інерційно-жорсткісних і дисипативних параметрів нелінійної сильно дисипативної коливальної системи разом з усіма суттєвими ознаками, включаючи відмінні, забезпечує підвищення точності визначення оцінки параметрів, а тому і функціональних можливостей і області застосування за рахунок проведення додаткових технологічних і технічних операцій по вимірюванню і реєстрації інформаційних масивів часових інтервалів і чисел циклів (періодів) коливань, які формують розширений інформаційний масив, що дає підставу для формування нового алгоритму математичних перетворень і застосуванню метода найменших квадратів, що і приводить до зменшення ступеня впливу випадкових похибок вимірювання і реєстрації на кінцевий результат визначення оцінок інерційно-жорсткісних і дисипативних параметрів нелінійної сильно дисипативної коливальної системи.

Метод формування нового способу оцінки інерційно-жорсткісних параметрів нелінійних сильно дисипативних коливальних систем і алгоритм для його реалізації базується на наступних теоретичних дослідженнях.

В роботі (Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. - М.: Физматгиз, 1963. - с. 185) застосовано асимптотичний метод Крилова-Боголюбова-Митропольського (КБМ) для отримання рішення диференціального рівняння, зокрема другого порядку:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2x=\varepsilon f\left(x,\frac{dx}{dt}\right), \qquad (1)$$

де: $\omega_0$ - частота вільних коливань лінійної породжувальної системи;

x - узагальнена координата;

$f\left(x,\frac{dx}{dt}\right)$ - нелінійна функція;

$\varepsilon>0$ - малий позитивний параметр.

Рішення $x = X_\alpha\cos\psi$ рівняння (1) в першому наближенні визначаються із рівнянь першого наближення [Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. - М.: Физматгиз, 1963. - с. 185]

$$\left.\begin{aligned}\frac{dX_\alpha}{dt}&=\varepsilon A_1(X_\alpha),\\ \frac{d\psi}{dt}&=\omega_0+\varepsilon B_1(X_{\alpha,})\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

де

$$\left.\begin{aligned}A_1(X_\alpha)&=-\frac{1}{2\pi\omega_0}\int_0^{2\pi}f(X_\alpha\cos\varphi,-X_\alpha\omega_0\sin\varphi)\sin\varphi d\varphi,\\ B_1(X_\alpha)&=-\frac{1}{2\pi X_0}\int_0^{2\pi}f(X_\alpha\cos\varphi,-X_\alpha\omega_0\sin\varphi)\cos\varphi d\varphi\end{aligned}\right\}, \qquad (3)$$

Із системи рівнянь (2) першого наближення робиться висновок про можливість дослідження аналізу і розрахунку повільно затухаючих або повільно зростаючих нелінійних коливань перехідних процесів, що наближені до гармонійних $x = X_\alpha\cos\omega_0 t$, амплітуда $X_\alpha$ і частота $\omega_0$ яких повільно змінюється.

При проведенні досліджень, аналізу і розрахунку ряду динамічних систем, зокрема в області авіаційної і ракетно-космічної техніки, мають місце випадки, коли коливні процеси відносяться до класу таких, що мають значне демпфування, або таких, що значно розходяться [Попов Е.П., Пальтов М.П. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем - М.: Физматгиз, 1960. - С. 507-512].

$$x(t)=X_\alpha\exp(\xi_0 t)\cos\omega_1 t\ , \qquad (4)$$

але з таким показником затухання $\xi_0$ і власною частотою $\omega_0$, що повільно змінюються на визначеному обмеженому часовому інтервалі.

Рішення (4) відповідає диференціальному рівнянню другого порядку [Попов Е. П., Пальтов М. П. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем - М.: Физматгиз, 1960. - С. 507-512].

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2h\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0\ , \qquad (5)$$

де $h=-\xi_0$, $\omega_0^2=Cm^{-1}$, $\omega_0^2=\omega_1^2+h^2$.

На підставі однорідного диференціального рівняння (5) диференціальне рівняння для нелінійної дисипативної коливальної системи має вигляд:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right). \qquad (6)$$

Узагальнення асимптотичного методу КБМ для рівняння (6) приводить до такої системи рівнянь першого наближення [Попов Б.П., Пальтов М.П. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем - М.: Физматгиз, 1960. - С. 507-512]

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dX_\alpha}{dt} = -hX_\alpha + \varepsilon\Phi_1(X_\alpha), \\ &\frac{d\psi}{dt} = \omega_1 + \varepsilon B_1(X_{\alpha,}), \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

рішення яких має вигляд

$$x = X_\alpha \sin\psi. \qquad (8)$$

Для спрощення аналізу системи (7) вводять нову зміну y(t), причому $Y_\alpha = X_\alpha \exp(ht)$, де $Y_\alpha$ - амплітуда значення змінної y(t).

Після введення нової змінної y(t) рівняння (7) першого наближення приймають вигляд

$$\frac{dX_\alpha^*}{dt} = \varepsilon A_1(X_\alpha), \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega_1 + \varepsilon B_1(X_{\alpha,}), \qquad (9)$$

де

$$X_\alpha^* = X_\alpha \exp(ht), \quad \frac{dX_\alpha}{dt} + hX_\alpha = \frac{dX_\alpha^*}{dt}\exp(-ht). \qquad (10)$$

На підставі співвідношення (10) отримаємо таку систему рівнянь:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dX_\alpha}{dt} = -hX_\alpha + \varepsilon A_1(X_\alpha)\exp(-ht), \\ &\frac{d\psi}{dt} = \omega_1 + \varepsilon B_1(X_{\alpha,}), \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Із системи рівнянь (11) отримаємо одне рівняння:

$$d\psi - \omega_1 dt = \exp(ht)\frac{B_1(X_\alpha)}{A_1(X_\alpha)}dX_\alpha + hX_\alpha \exp(ht)\frac{B_1(X_\alpha)}{A_1(X\alpha)}dt. \qquad (12)$$

При умові ψ = 2πn (n - число циклів коливань) на підставі (12) отримаємо інтегральне рівняння:

$$2\pi n - \omega_1\Delta t = \int\limits_{(X_\alpha)} e^{ht}\frac{B_1(X_\alpha)}{A_1(X_\alpha)}dX_\alpha + \int\limits_{(t)} hX_\alpha e^{ht}\frac{B_1(X_\alpha)}{A_1(X_\alpha)}dt. \qquad (13)$$

На підставі (13) отримаємо таку систему рівнянь:

$$2\pi n_1 = \omega_1\Delta_1 t + \int_{X_{\alpha1}}^{X_{\alpha2}} e^{ht}\frac{B_1(X_\alpha)}{A_1(X_\alpha)}dX_\alpha + \int_{t_1}^{t_2} hX_\alpha e^{ht}\frac{B_1(X_\alpha)}{A_1(X_\alpha)}dt, \qquad (14)$$

$$2\pi n_2 = \omega_1\Delta_2 t + \int_{X_{\alpha3}}^{X_{\alpha4}} e^{ht}\frac{B_1(X_\alpha)}{A_1(X_\alpha)}dX_\alpha + \int_{t_3}^{t_4} hX_\alpha e^{ht}\frac{B_1(X_\alpha)}{A_1(X_\alpha)}dt, \qquad (15)$$

$$2\pi n_3 = \overline{\omega}_1\Delta_3 t + \int_{X_{\alpha1}}^{X_{\alpha2}} e^{ht}\frac{B_1(X_\alpha)}{A_1(X_\alpha)}dX_\alpha + \int_{t_1}^{t_2} hX_\alpha e^{ht}\frac{B_1(X_\alpha)}{A_1(X_\alpha)}dt, \qquad (16)$$

$$2\pi n_4 = \overline{\omega}_1\Delta_4 t + \int_{X_{\alpha3}}^{X_{\alpha4}} e^{ht}\frac{B_1(X_\alpha)}{A_1(X_\alpha)}dX_\alpha + \int_{t_3}^{t_4} hX_\alpha e^{ht}\frac{B_1(X_\alpha)}{A_1(X_\alpha)}dt, \qquad (17)$$

$$2\pi n_5 = \overline{\overline{\omega}}_1\Delta_5 t + \int_{X_{\alpha1}}^{X_{\alpha2}} e^{ht}\frac{B_1(X_\alpha)}{A_1(X_\alpha)}dX_\alpha + \int_{t_1}^{t_2} hX_\alpha e^{ht}\frac{B_1(X_\alpha)}{A_1(X_\alpha)}dt, \qquad (18)$$

$$2\pi n_6 = \overline{\overline{\omega}}_1\Delta_6 t + \int_{X_{\alpha3}}^{X_{\alpha4}} e^{ht}\frac{B_1(X_\alpha)}{A_1(X_\alpha)}dX_\alpha + \int_{t_3}^{t_4} hX_\alpha e^{ht}\frac{B_1(X_\alpha)}{A_1(X_\alpha)}dt, \qquad (19)$$

де

$$\omega_1 = \sqrt{cm^{-1} - h^2}, \quad \overline{\omega}_1 = \sqrt{c(m+\Delta_1 m)^{-1} - \overline{h}^2}, \quad \overline{\overline{\omega}}_1 = \sqrt{c(m+\Delta_2 m)^{-1} - \overline{\overline{h}}^2},$$

$$h = \frac{b}{2m}, \quad \overline{h} = \frac{b}{2(m+\Delta_1 m)}, \quad \overline{\overline{h}} = \frac{b}{2(m+\Delta_2 m)}; \qquad (20)$$

$\Delta_1 m$, $\Delta_2 m$ ($\Delta_1 m \neq \Delta_2 m$, $\Delta_1 m << m$, $\Delta_2 m << m$) - перша і друга додаткові маси;

$n_1$, $n_2$ - числа циклів затухаючих коливань при зміні амплітуди коливань від першого початкового значення $X_{a1}$ до першого кінцевого значення $X_{a2}$, від другого початкового значення $X_{a3}$ до другого кінцевого значення $X_{a4}$ відповідно;

$\Delta_1 t$, $\Delta_2 t$ - часові інтервали, що відповідають числам циклів $n_1$, $n_2$;

$n_3$, $n_4$ - числа циклів затухаючих коливань маси $\{m + \Delta_1 m\}$ при зміні амплітуди затухаючих коливань від першого початкового значення $X_{a1}$ до першого кінцевого значення $X_{a2}$, від другого початкового значення $X_{a3}$ до другого кінцевого значення $X_{a4}$ відповідно;

$\Delta_3 t$, $\Delta_4 t$ - часові інтервали, що відповідають числам $n_3$, $n_4$ циклів (періодів) коливань;

$n_5$, $n_6$ - числа циклів (періодів) затухаючих коливань маси $(m + \Delta_2 m)$ при зміні амплітуди затухаючих коливань від першого початкового значення $X_{a1}$ до першого кінцевого значення $X_{a2}$, від другого початкового значення $X_{a3}$ до другого кінцевого значення $X_{a4}$ відповідно;

$\Delta_5 t$, $\Delta_6 t$ - часові інтервали, що відповідають числам $n_5$, $n_6$ циклів коливань. Після проведення нескладних перетворень системи рівнянь (14), (15), (16), (17), (18), (19) отримаємо такі рівняння для визначення частот $\omega_1$, $\bar{\omega}_1$, $\bar{\bar{\omega}}_1$:

$$\left.\begin{aligned}
&\omega_1 \Delta_1 t - \bar{\omega}_1 \Delta_3 t = 2\pi (n_1 - n_3),\\
&\omega_1 \Delta_2 t - \bar{\omega}_1 \Delta_4 t = 2\pi (n_2 - n_4),\\
&\omega_1 \Delta_1 t - \bar{\bar{\omega}}_1 \Delta_5 t = 2\pi (n_1 - n_5),\\
&\omega_1 \Delta_2 t - \bar{\bar{\omega}}_1 \Delta_6 t = 2\pi (n_2 - n_6).
\end{aligned}\right\}. \qquad (21)$$

Із системи (20) рівнянь отримаємо співвідношення для визначення частот $\omega_1$, $\bar{\omega}_1$, $\bar{\bar{\omega}}_1$:

$$\omega_1 = 2\pi \frac{[\Delta_3 t (n_2 - n_4) - \Delta_4 t (n_1 - n_3)]}{(\Delta_2 t \Delta_3 t - \Delta_1 t \Delta_4 t)}, \qquad (22)$$

або

$$\overset{\frown}{\omega}_1 = 2\pi \frac{[\Delta_5 t (n_2 - n_6) - \Delta_6 t (n_1 - n_5)]}{(\Delta_2 t \Delta_5 t - \Delta_1 t \Delta_6 t)}, \qquad (23)$$

$$\hat{\omega}_1 = 2\pi \frac{[\Delta_1 t (n_2 - n_4) - \Delta_2 t (n_1 - n_3)]}{(\Delta_2 t \Delta_3 t - \Delta_1 t \Delta_4 t)}, \qquad (24)$$

$$\bar{\bar{\omega}}_1 = 2\pi \frac{[\Delta_1 t (n_2 - n_6) - \Delta_2 t (n_1 - n_5)]}{(\Delta_2 t \Delta_5 t - \Delta_1 t \Delta_6 t)}. \qquad (25)$$

Приймаючи до уваги той факт, що часові інтервали $\Delta t$, числа циклів (періодів) «n» коливань і амплітудні $X_a$ значення коливального процесу вимірюють і фіксують при наявності випадкових похибок для підвищення точності визначення параметрів (оцінок параметрів) необхідно сформувати інформаційні масиви множин часових інтервалів, чисел циклів коливань і амплітудних значень коливань, сформувати відповідні регресійні залежності і застосувати метод найменших квадратів.

На підставі (14), (15), (16), (17), (18), (19) маємо таку систему рівнянь:

$$2\pi \sum_{i=1}^{N} n_{1i} \Delta_{1i} t - \hat{\omega}_1 \sum_{i=1}^{N} \Delta_{1i}^2 t + \sum_{i=1}^{N} \Delta_{1i} t \left[ \int_{X\alpha_1}^{X\alpha_2} (\circ) dx_\alpha + \int_{t_1}^{t_2} (\circ) dt \right] = 0; \qquad (26)$$

$$2\pi \sum_{i=1}^{N} n_{2i} \Delta_{2i} t - \hat{\omega}_1 \sum_{i=1}^{N} \Delta_{2i}^2 t + \sum_{i=1}^{N} \Delta_{2i} t \left[ \int_{X\alpha_3}^{X\alpha_4} (\circ) dx_\alpha + \int_{t_3}^{t_4} (\circ) dt \right] = 0; \qquad (27)$$

$$2\pi \sum_{i=1}^{N} n_{3i} \Delta_{3i} t - \hat{\bar{\omega}}_1 \sum_{i=1}^{N} \Delta_{3i}^2 t + \sum_{i=1}^{N} \Delta_{3i} t \left[ \int_{X\alpha_1}^{X\alpha_2} (\circ) dx_\alpha + \int_{t_5}^{t_6} (\circ) dt \right] = 0; \qquad (28)$$

$$2\pi \sum_{i=1}^{N} n_{4i} \Delta_{4i} t - \hat{\bar{\omega}}_1 \sum_{i=1}^{N} \Delta_{4i}^2 t + \sum_{i=1}^{N} \Delta_{4i} t \left[ \int_{X\alpha_3}^{X\alpha_4} (\circ) dx_\alpha + \int_{t_7}^{t_8} (\circ) dt \right] = 0; \qquad (29)$$

$$2\pi \sum_{i=1}^{N} n_{5i} \Delta_{5i} t - \hat{\bar{\bar{\omega}}}_1 \sum_{i=1}^{N} \Delta_{5i}^2 t + \sum_{i=1}^{N} \Delta_{5i} t \left[ \int_{X\alpha_1}^{X\alpha_2} (\circ) dx_\alpha + \int_{t_9}^{t_{10}} (\circ) dt \right] = 0; \qquad (30)$$

$$2\pi \sum_{i=1}^{N} n_{6i} \Delta_{6i} t - \hat{\bar{\bar{\omega}}}_1 \sum_{i=1}^{N} \Delta_{6i}^2 t + \sum_{i=1}^{N} \Delta_{6i} t \left[ \int_{X\alpha_3}^{X\alpha_4} (\circ) dx_\alpha + \int_{t_{11}}^{t_{12}} (\circ) dt \right] = 0. \qquad (31)$$

Якщо в рівняннях (26), (28) порівняти суми інтегральних складових, то отримаємо таке рівняння:

$$\hat{\omega}_1\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}^2t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}t-\hat{\bar{\omega}}_1\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}^2t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}t=2\pi\left(\sum_{i=1}^{N}n_{1i}\Delta_{1i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{3i}\Delta_{3i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}t\right).(32)$$

Якщо в рівняннях (27), (29) порівняти суми інтегральних складових, то отримаємо таке рівняння:

$$\hat{\omega}_1\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}^2t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}t-\hat{\bar{\omega}}_1\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}^2t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}t=2\pi\left(\sum_{i=1}^{N}n_{2i}\Delta_{2i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{4i}\Delta_{4i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}t\right).(33)$$

Якщо в рівняннях (26), (30) порівняти суми інтегральних складових, то отримаємо таке рівняння:

$$\hat{\omega}_1\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}^2t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}t-\hat{\bar{\bar{\omega}}}_1\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}^2t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}t=2\pi\left(\sum_{i=1}^{N}n_{1i}\Delta_{1i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{5i}\Delta_{5i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}t\right).(34)$$

Якщо в рівняннях (27), (31) порівняти суми інтегральних складових, то отримаємо таке рівняння:

$$\hat{\omega}_1\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}^2t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}t-\hat{\bar{\bar{\omega}}}_1\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}^2t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}t=2\pi\left(\sum_{i=1}^{N}n_{2i}\Delta_{2i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{6i}\Delta_{6i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}t\right).(35)$$

Якщо в рівняннях (28), (30) порівняти суми інтегральних складових, то отримаємо таке рівняння:

$$\hat{\bar{\omega}}_1\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}^2t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}t-\hat{\bar{\bar{\omega}}}_1\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}^2t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}t=2\pi\left(\sum_{i=1}^{N}n_{3i}\Delta_{3i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{5i}\Delta_{5i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}t\right). (36)$$

Якщо в рівняннях (29), (31) порівняти суми інтегральних складових, то отримаємо таке рівняння:

$$\hat{\bar{\omega}}_1\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}^2t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}t-\hat{\bar{\bar{\omega}}}_1\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}^2t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}t=2\pi\left(\sum_{i=1}^{N}n_{4i}\Delta_{4i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{6i}\Delta_{6i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}t\right).(37)$$

Для визначення оцінок $\hat{\omega}_1$, $\hat{\bar{\omega}}_1$, $\hat{\bar{\bar{\omega}}}_1$ параметрів $\omega_1$, $\bar{\omega}_1$, $\bar{\bar{\omega}}_1$ застосуємо системи рівнянь (32), (33), (34), (35), (36), (37)

$$\left.\begin{aligned}&\hat{\omega}_1\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}^2t-\hat{\bar{\omega}}_1\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}^2t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}t=2\pi\left[\sum_{i=1}^{N}n_{1i}\Delta_{1i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{3i}\Delta_{3i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}t\right],\\&\hat{\omega}_1\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}^2t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}t-\hat{\bar{\omega}}_1\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}^2t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}t=2\pi\left[\sum_{i=1}^{N}n_{2i}\Delta_{2i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{4i}\Delta_{4i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}t\right]\end{aligned}\right\}. (38)$$

$$\begin{aligned}\Delta&=\begin{vmatrix}\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}^2t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}t & -\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}^2t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}t\\ \sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}^2t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}t & -\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}^2t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}t\end{vmatrix}=\\&=\left(\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}^2t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}^2t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}t-\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}^2t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}^2t\right);\end{aligned}\qquad(39)$$

$$\begin{aligned}\Delta_{\omega1}&=\begin{vmatrix}2\pi\left[\sum_{i=1}^{N}n_{1i}\Delta_{1i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{3i}\Delta_{3i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}t\right] & -\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}^2t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}t\\ 2\pi\left[\sum_{i=1}^{N}n_{2i}\Delta_{2i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{4i}\Delta_{4i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}t\right] & -\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}^2t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}t\end{vmatrix}=\\&=2\pi\left\{\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}^2t\left(\sum_{i=1}^{N}n_{2i}\Delta_{2i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{4i}\Delta_{4i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}t\right)-\right.\\&\left.-\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}^2t\left(\sum_{i=1}^{N}n_{1i}\Delta_{1i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{3i}\Delta_{3i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}t\right)\right\};\end{aligned}\qquad(40)$$

$$\Delta_{\bar{\omega}_1}=\begin{vmatrix}\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}^{2}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}t & 2\pi\left(\sum_{i=1}^{N}n_{1i}\Delta_{1i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{3i}\Delta_{3i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}t\right)\\ \sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}^{2}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}t & 2\pi\left(\sum_{i=1}^{N}n_{2i}\Delta_{2i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{4i}\Delta_{4i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}t\right)\end{vmatrix}=$$

$$=2\pi\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}^{2}t\left\{\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}t\left(\sum_{i=1}^{N}n_{2i}\Delta_{2i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{4i}\Delta_{4i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}t\right)-\right.$$

$$\left.-\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}^{2}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}t\left(\sum_{i=1}^{N}n_{1i}\Delta_{1i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{3i}\Delta_{3i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}t\right)\right\}; \qquad (41)$$

$$\hat{\omega}_1=2\pi\frac{\begin{array}{l}\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}^{2}t\left(\sum_{i=1}^{N}n_{2i}\Delta_{2i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{4i}\Delta_{4i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}t\right)-\\ -\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}^{2}t\left(\sum_{i=1}^{N}n_{1i}\Delta_{1i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{3i}\Delta_{3i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}t\right)\end{array}}{\left(\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}^{2}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}^{2}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}t-\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}^{2}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}^{2}t\right)}; \qquad (42)$$

$$\hat{\bar{\omega}}_1=2\pi\frac{\begin{array}{l}\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}^{2}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}t\left(\sum_{i=1}^{N}n_{2i}\Delta_{2i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{4i}\Delta_{4i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}t\right)-\\ -\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}^{2}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}t\left(\sum_{i=1}^{N}n_{1i}\Delta_{1i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{3i}\Delta_{3i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}t\right)\end{array}}{\left(\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}^{2}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}^{2}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}t-\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}^{2}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}^{2}t\right)}; \qquad (43)$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{\omega}_1\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}^{2}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}t-\hat{\bar{\bar{\omega}}}_1\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}^{2}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}t=2\pi\left[\sum_{i=1}^{N}n_{1i}\Delta_{1i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{5i}\Delta_{5i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}t\right],\\ \hat{\omega}_1\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}^{2}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}t-\hat{\bar{\bar{\omega}}}_1\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}^{2}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}t=2\pi\left[\sum_{i=1}^{N}n_{2i}\Delta_{2i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{6i}\Delta_{6i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}t\right]\end{array}\right\};(44)$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}^{2}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}t & -\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}^{2}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}t\\ \sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}^{2}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}t & -\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}^{2}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}t\end{vmatrix}= \qquad (45)$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}^{2}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}^{2}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}t-\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}^{2}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}^{2}t\right);$$

$$\Delta_{\hat{\omega}1}=\begin{vmatrix}2\pi\left[\sum_{i=1}^{N}n_{1i}\Delta_{1i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{5i}\Delta_{5i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}t\right] & -\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}^{2}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}t\\ 2\pi\left[\sum_{i=1}^{N}n_{2i}\Delta_{2i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{6i}\Delta_{6i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}t\right] & -\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}^{2}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}t\end{vmatrix}=$$

$$=2\pi\left\{\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}^{2}t\left(\sum_{i=1}^{N}n_{2i}\Delta_{2i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{6i}\Delta_{6i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}t\right)-\right. \qquad (46)$$

$$\left.-\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}^{2}\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}t\left(\sum_{i=1}^{N}n_{1i}\Delta_{1i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{5i}\Delta_{5i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}t\right)\right\};$$

$$\Delta_{\bar{\bar{\omega}}_1}=\begin{vmatrix}\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}^{2}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}t & 2\pi\left(\sum_{i=1}^{N}n_{1i}\Delta_{1i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{5i}\Delta_{5i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}t\right)\\ \sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}^{2}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}t & 2\pi\left(\sum_{i=1}^{N}n_{2i}\Delta_{2i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{6i}\Delta_{6i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}t\right)\end{vmatrix}=$$

$$=2\pi\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}^{2}t\left\{\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}t\left(\sum_{i=1}^{N}n_{2i}\Delta_{2i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{6i}\Delta_{6i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}t\right)-\right.$$

$$\left.-\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}^{2}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}t\left(\sum_{i=1}^{N}n_{1i}\Delta_{1i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{5i}\Delta_{5i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}t\right)\right\};\qquad(47)$$

$$\hat{\bar{\bar{\omega}}}_1=2\pi\frac{\left[\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}^{2}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}t\left(\sum_{i=1}^{N}n_{2i}\Delta_{2i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{6i}\Delta_{6i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}t\right)-\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}^{2}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}t\left(\sum_{i=1}^{N}n_{1i}\Delta_{1i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{5i}\Delta_{5i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}t\right)\right]}{\left(\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}^{2}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}^{2}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}t-\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}^{2}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}^{2}t\right)};\qquad(48)$$

$$\hat{\omega}_1=2\pi\frac{\left[\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}^{2}t\left(\sum_{i=1}^{N}n_{2i}\Delta_{2i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{6i}\Delta_{6i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}t\right)-\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}^{2}t\left(\sum_{i=1}^{N}n_{1i}\Delta_{1i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{5i}\Delta_{5i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}t\right)\right]}{\left(\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}^{2}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}^{2}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}t-\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}^{2}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}^{2}t\right)};\qquad(49)$$

$$\left.\begin{aligned}\hat{\bar{\omega}}_1\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}^{2}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}t-\hat{\bar{\bar{\omega}}}_1\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}^{2}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}t&=2\pi\left[\sum_{i=1}^{N}n_{3i}\Delta_{3i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{5i}\Delta_{5i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}t\right],\\ \hat{\bar{\omega}}_1\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}^{2}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}t-\hat{\bar{\bar{\omega}}}_1\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}^{2}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}t&=2\pi\left[\sum_{i=1}^{N}n_{4i}\Delta_{4i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{6i}\Delta_{6i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}t\right]\end{aligned}\right\};(50)$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}^{2}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}t & \left(-\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}^{2}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}t\right)\\ \sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}^{2}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}t & \left(-\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}^{2}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}t\right)\end{vmatrix}=\qquad(51)$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}^{2}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}^{2}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}t-\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}^{2}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}^{2}t\right);$$

$$\Delta_{\bar{\omega}1}=\begin{vmatrix}2\pi\left(\sum_{i=1}^{N}n_{3i}\Delta_{3i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{5i}\Delta_{5i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}t\right) & \left(-\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}^{2}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}t\right)\\ 2\pi\left(\sum_{i=1}^{N}n_{4i}\Delta_{4i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{6i}\Delta_{6i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}t\right) & \left(-\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}^{2}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}t\right)\end{vmatrix}=\qquad(52)$$

$$=2\pi\left\{\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}^{2}t\left(\sum_{i=1}^{N}n_{4i}\Delta_{4i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{6i}\Delta_{6i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}t\right)-\right.$$

$$\left.-\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}^{2}\left(\sum_{i=1}^{N}n_{3i}\Delta_{3i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{5i}\Delta_{5i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}t\right)\right\};$$

$$\Delta_{\bar{\omega}_1} = \begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{N}\Delta_{3\,i}^2 t\sum\limits_{i=1}^{N}\Delta_{5i}t & 2\pi\left(\sum\limits_{i=1}^{N}n_{3i}\Delta_{3i}t\sum\limits_{i=1}^{N}\Delta_{5i}t-\sum\limits_{i=1}^{N}n_{5i}\Delta_{5i}t\sum\limits_{i=1}^{N}\Delta_{3i}t\right) \\ \sum\limits_{i=1}^{N}\Delta_{4\,i}^2 t\sum\limits_{i=1}^{N}\Delta_{6i}t & 2\pi\left(\sum\limits_{i=1}^{N}n_{4i}\Delta_{4i}t\sum\limits_{i=1}^{N}\Delta_{6i}t-\sum\limits_{i=1}^{N}n_{6i}\Delta_{6i}t\sum\limits_{i=1}^{N}\Delta_{4i}t\right) \end{vmatrix} =$$

$$= 2\pi\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}^2 t\left\{\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}t\left(\sum_{i=1}^{N}n_{4i}\Delta_{4i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{6i}\Delta_{6i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}t\right)-\right.$$
$$\left.-\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}^2 t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}t\left(\sum_{i=1}^{N}n_{3i}\Delta_{3\,i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{5i}\Delta_{5i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3\,i}t\right)\right\}; \qquad (53)$$

$$\hat{\bar{\omega}}_1 = 2\pi\frac{\left[\sum\limits_{i=1}^{N}\Delta_{3\,i}t\sum\limits_{i=1}^{N}\Delta_{5\,i}^2 t\left(\sum\limits_{i=1}^{N}n_{4i}\Delta_{4i}t\sum\limits_{i=1}^{N}\Delta_{6\,i}t-\sum\limits_{i=1}^{N}n_{6\,i}\Delta_{6i}t\sum\limits_{i=1}^{N}\Delta_{4\,i}t\right)- -\sum\limits_{i=1}^{N}\Delta_{4i}t\sum\limits_{i=1}^{N}\Delta_{6i}^2 t\left(\sum\limits_{i=1}^{N}n_{3i}\Delta_{3i}t\sum\limits_{i=1}^{N}\Delta_{5i}t-\sum\limits_{i=1}^{N}n_{5i}\Delta_{5i}t\sum\limits_{i=1}^{N}\Delta_{3i}t\right)\right]}{\left(\sum\limits_{i=1}^{N}\Delta_{3i}t\sum\limits_{i=1}^{N}\Delta_{4i}^2 t\sum\limits_{i=1}^{N}\Delta_{5i}^2 t\sum\limits_{i=1}^{N}\Delta_{6i}t-\sum\limits_{i=1}^{N}\Delta_{3i}^2 t\sum\limits_{i=1}^{N}\Delta_{4i}t\sum\limits_{i=1}^{N}\Delta_{5i}t\sum\limits_{i=1}^{N}\Delta_{6i}^2 t\right)}; \qquad (54)$$

$$\hat{\bar{\bar{\omega}}}_1 = 2\pi\frac{\left[\sum\limits_{i=1}^{N}\Delta_{3\,i}^2 t\sum\limits_{i=1}^{N}\Delta_{5\,i}t\left(\sum\limits_{i=1}^{N}n_{4i}\Delta_{4i}t\sum\limits_{i=1}^{N}\Delta_{6\,i}t-\sum\limits_{i=1}^{N}n_{6\,i}\Delta_{6i}t\sum\limits_{i=1}^{N}\Delta_{4\,i}t\right)- -\sum\limits_{i=1}^{N}\Delta_{4i}^2 t\sum\limits_{i=1}^{N}\Delta_{6i}t\left(\sum\limits_{i=1}^{N}n_{3i}\Delta_{1i}t\sum\limits_{i=1}^{N}\Delta_{3i}t-\sum\limits_{i=1}^{N}n_{5i}\Delta_{5i}t\sum\limits_{i=1}^{N}\Delta_{3i}t\right)\right]}{\left(\sum\limits_{i=1}^{N}\Delta_{3i}t\sum\limits_{i=1}^{N}\Delta_{4i}^2 t\sum\limits_{i=1}^{N}\Delta_{5i}^2 t\sum\limits_{i=1}^{N}\Delta_{6i}t-\sum\limits_{i=1}^{N}\Delta_{3i}^2 t\sum\limits_{i=1}^{N}\Delta_{4i}t\sum\limits_{i=1}^{N}\Delta_{5i}t\sum\limits_{i=1}^{N}\Delta_{6i}^2 t\right)}. \qquad (55)$$

На підставі (20), застосовуючи аналітичні співвідношення для визначення оцінок частот $\hat{\omega}_1$, $\hat{\bar{\omega}}_1$, $\hat{\bar{\bar{\omega}}}_1$, отримаємо співвідношення для визначення оцінок параметрів $\hat{m}$, $\hat{c}$, $\hat{h}$, $\hat{b} = 2\hat{m}\hat{h}$ нелінійної сильно дисипативної коливальної системи:

$$\left.\begin{aligned} \hat{\bar{\omega}}_1^2\left(1+\frac{\Delta_1 m}{\hat{m}}\right)^2 - \hat{\omega}_1^2 &= \frac{\hat{c}}{\hat{m}}\times\frac{\Delta_1 m}{\hat{m}}, \\ \hat{\bar{\bar{\omega}}}_1^2\left(1+\frac{\Delta_2 m}{\hat{m}}\right)^2 - \hat{\omega}_1^2 &= \frac{\hat{c}}{\hat{m}}\times\frac{\Delta_2 m}{\hat{m}} \end{aligned}\right\}. \qquad (56)$$

Після ділення лівих і правих частин рівнянь (56) отримаємо співвідношення для оцінки $\hat{m}$ параметра $m$ :

$$\hat{m} = \frac{\Delta_1 m\Delta_2 m\left(\hat{\bar{\bar{\omega}}}_1^2 - \hat{\bar{\omega}}_1^2\right)}{\left(\hat{\bar{\omega}}_1^2\Delta_2 m - \hat{\bar{\bar{\omega}}}_1^2\Delta_1 m\right)}. \qquad (57)$$

Застосовуючи (56), отримаємо співвідношення для оцінки $\hat{c}$ параметра с.

$$\hat{c} = \frac{\hat{m}^2\hat{\bar{\omega}}_1^2}{\Delta_1 m}\left(1+\frac{\Delta_1 m}{\hat{m}}\right) \text{ або } \hat{c} = \frac{\hat{m}^2\hat{\bar{\bar{\omega}}}_1^2}{\Delta_2 m}\left(1+\frac{\Delta_2 m}{\hat{m}}\right), \qquad (58)$$

де оцінка параметра $\hat{m}$ визначається співвідношенням (57).

Оцінка $\hat{\omega}_0$ частоти $\omega_0$ вільних коливань лінійної породжувальної системи визначається на підставі (57), (58), а саме:

$$\hat{\omega}_0^2 = \frac{\hat{c}}{\hat{m}} = \frac{\hat{m}\ \hat{\bar{\omega}}_1^2}{\Delta_1 m}\left(1+\frac{\Delta_1 m}{\hat{m}}\right) \text{ або } \hat{\omega}_0^2 = \frac{\hat{m}\ \hat{\bar{\bar{\omega}}}_1^2}{\Delta_2 m}\left(1+\frac{\Delta_2 m}{\hat{m}}\right). \qquad (59)$$

Оцінки $\hat{b}$, $\hat{h}$ коефіцієнтів опору «b» і демпфування «h» отримаємо на підставі (20):

$$\hat{b} = 2\hat{m}\sqrt{\hat{\omega}_0^2 - \hat{\omega}_1^2}\ ,\ \hat{b} = 2(\hat{m}+\Delta_1 m)\sqrt{\hat{\omega}_0^2 - \hat{\bar{\omega}}_1^2}\ ,\ \hat{b} = 2(\hat{m}+\Delta_2 m)\sqrt{\hat{\omega}_0^2 - \hat{\bar{\bar{\omega}}}_1^2}\ ; \qquad (60)$$

$$\hat{h} = \frac{\hat{b}}{2\hat{m}} = \sqrt{\hat{\omega}_0^2 - \hat{\omega}_1^2}\ ,\ \hat{\hat{h}} = \frac{\bar{b}}{2(\hat{m} + \Delta_1 m)}\ ,\ \hat{\hat{\hat{h}}} = \frac{\bar{b}}{2(\hat{m} + \Delta_2 m)}. \qquad (61)$$

Отримані аналітичні співвідношення (42), (43), (48), (49), (54), (55), (57), (58), (59), (60), (61) визначають оцінки інерційно-жорсткісних і дисипативних параметрів нелінійних сильно дисипативних коливальних систем.

Спосіб визначення оцінок параметрів нелінійної сильно дисипативної коливальної системи реалізують на підставі наступного алгоритму:

1) формують першу групу «N» режимів вільних коливань досліджуваної нелінійної сильно дисипативної коливальної системи; задають значення першої початкової $X_{a1}$ і першої кінцевої $X_{a2}$ амплітуд вільних коливань цієї нелінійної системи;

2) при фіксації зміни амплітуди вільних затухаючих коливань від першого початкового $X_{a1}$ значення до першого кінцевого значення $X_{a2}$ вимірюють, реєструють і запам'ятовують значення величин першої множини «N» часових інтервалів $\Delta_{1i}t$ і множини «N» чисел $n_{1i}$ циклів (періодів ) коливань в цій множині часових інтервалів;

3) формують другу групу «N» режимів вільних коливань нелінійної сильно дисипативної коливальної системи і задають значення другої початкової $X_{a3}$ амплітуди і другої кінцевої $X_{a4}$ амплітуди вільних коливань цієї коливальної системи;

4) при фіксації зміни амплітуди вільних затухаючих коливань від другого початкового значення $X_{a3}$ до другого кінцевого значення $X_{a4}$ вимірюють, реєструють і запам'ятовують значення величин другої множини «N» часових інтервалів $\Delta_{2i}t$ і множини «N» чисел $n_{2i}$ циклів (періодів) коливань в цій множині часових інтервалів;

5) змінюють інерційність нелінійної дисипативної коливальної системи шляхом жорсткого з'єднання з масою "m" коливальної системи першої додаткової маси $\Delta_1 m$ при такій умові вибору маси $\Delta_1 m(\Delta_1 m \ll m)$, що змінює частоту вільних коливань нелінійної дисипативної коливальної системи;

6) формують третій режим вільних коливань нелінійної дисипативної коливальної системи із зміненою інерційністю; задають значення першої початкової $X_{a1}$ амплітуди і першої кінцевої $X_{a2}$ амплітуди вільних затухаючих коливань нелінійної дисипативної коливальної системи;

7) при фіксації зміни амплітуди вільних затухаючих коливань від першого початкового значення $X_{a1}$ до першого кінцевого значення $X_{a2}$ вимірюють, реєструють і запам'ятовують значення величин третьої множини «N» часових інтервалів $\Delta_{3i}t$ і множини «N» чисел $n_{3i}$ циклів (періодів) коливань в цій множині часових інтервалів;

8) при фіксації зміни амплітуди вільних затухаючих коливань від другого початкового значення $X_{a3}$ до другого кінцевого значення $X_{a4}$ вимірюють, реєструють і запам'ятовують значення величин четвертої множини «N» часових інтервалів $\Delta_{4i}t$ і множини «N» чисел $n_{4i}$ циклів (періодів) коливань в цій множині часових інтервалів;

9) повторно змінюють інерційність нелінійної дисипативної коливальної системи шляхом жорсткого з'єднання з масою "m" системи другої додаткової маси $\Delta_2 m$ при такій умові вибору маси $\Delta_2 m(\Delta_2 m \ll m)$, що змінює частоту вільних коливань нелінійної дисипативної коливальної системи;

10) формують п'ятий режим вільних коливань нелінійної дисипативної коливальної системи із зміненою інерційністю; задають значення першої початкової $X_{a1}$ і першої кінцевої $X_{a2}$ амплітуди вільних затухаючих коливань нелінійної дисипативної коливальної системи;

11) при фіксації зміни амплітуди вільних затухаючих коливань від першого початкового значення $X_{a1}$ до першого кінцевого значення $X_{a2}$ вимірюють, реєструють і запам'ятовують значення величин п'ятої множини «N» часових інтервалів $\Delta_{5i}t$ і множини «N» чисел $n_{5i}$ циклів (періодів) коливань в цій множині часових інтервалів;

12) при фіксації зміни амплітуди вільних затухаючих коливань від другого початкового значення $X_{a3}$ до другого кінцевого значення $X_{a4}$ вимірюють, реєструють і запам'ятовують значення величин шостої множини «N» часових інтервалів $\Delta_{6i}t$ і множини «N» чисел $n_{6i}$ циклів (періодів) коливань в цій множині часових інтервалів.

Новим в алгоритмі реалізації способу визначення оцінок параметрів нелінійної сильно дисипативної коливальної системи є проведення технологічних операцій формування шести груп режимів, кожну із яких формують із «N-1» режимів вільних затухаючих коливань, причому першу і другу групи режимів формують без зміни інерційності нелінійної коливальної системи, третю і четверту групи режимів формують після першої зміни інерційності нелінійної коливальної системи, п'яту і шосту групи режимів формують після другої зміни інерційності нелінійної коливальної системи, в першій, третій і п'ятій групах режимів вільних затухаючих коливань вимірюють і реєструють першу, третю і п'яту групи часових інтервалів і чисел циклів (періодів) коливань відповідно множини «N-1» при зміні амплітуди вільних затухаючих коливань від першого початкового значення до першого кінцевого значення, в другій, четвертій і шостій групах режимів вільних затухаючих коливань вимірюють і реєструють другу, четверту і шосту групи часових інтервалів і чисел циклів (періодів) коливань відповідно множини «N-1» при зміні амплітуди вільних затухаючих коливань від другого початкового значення до другого кінцевого значення.

Спосіб визначення параметрів нелінійної дисипативної коливальної системи реалізують наступним чином:

1) установлюють випробувану конструкцію на рухому платформу вібростенда електродинамічного типу;

2) послідовно реалізують шість режимів вільних коливань досліджуваної конструкції, де перші два режими реалізують без зміни інерційності коливальної системи; в цих режимах фіксують і запам'ятовують числа циклів коливань і часові інтервали при зміні амплітуди вільних коливань від першого початкового значення до першого кінцевого значення (перший режим), від другого початкового значення до другого кінцевого значення (другий режим);

3) реалізують третій і четвертий режими вільних коливань досліджуваної конструкції при зміні інерційності за рахунок жорсткого з'єднання коливальної маси із першою додатковою масою; в цих режимах фіксують і запам'ятовують числа циклів коливань і відповідні часові інтервали при зміні амплітуди вільних коливань від першого початкового значення до першого кінцевого значення (третій режим), від другого початкового значення до другого кінцевого значення (четвертий режим);

4) реалізують п'ятий і шостий режими вільних коливань досліджуваної конструкції при зміні інерційності за рахунок жорсткого з'єднання коливальної маси із другою додатковою масою; в цих режимах фіксують і запам'ятовують числа циклів коливань і відповідні часові інтервали при зміні амплітуди вільних коливань від першого початкового значення до першого кінцевого значення (п'ятий режим), від другого початкового значення до другого кінцевого значення (шостий режим);

5) за допомогою вимірювально-обчислювального комплексу проводять обробку масиву зафіксованих сигналів, що відповідають шести масивам чисел циклів і шести масивам значень часових інтервалів при реалізації шести режимів вільних коливань досліджуваної конструкції і на підставі отриманих аналітичних співвідношень визначають значення інерційно-жорсткісних і дисипативних параметрів.

## ФОРМУЛА КОРИСНОЇ МОДЕЛІ

Спосіб визначення параметрів нелінійної сильно дисипативної коливальної системи, за яким задають перше початкове і перше кінцеве значення амплітуди вільних затухаючих коливань нелінійної сильно дисипативної коливальної системи, проводять вимір першого часового інтервалу і числа циклів в цьому інтервалі при зміні амплітуди вільних затухаючих коливань від першого початкового до першого кінцевого значення, далі задають друге початкове і друге кінцеве значення амплітуди вільних затухаючих коливань і проводять вимір другого часового інтервалу і числа циклів коливань в цьому часовому інтервалі при зміні амплітуди вільних затухаючих коливань від другого початкового до другого кінцевого значення, потім перший раз змінюють інерційність нелінійної сильно дисипативної коливальної системи і проводять вищевказану сукупність операцій по визначенню третього і четвертого часових інтервалів і числа циклів (періодів) коливань в цих часових інтервалах при зміні амплітуди вільних затухаючих коливань від її першого початкового значення до першого кінцевого значення, від другого початкового значення до другого кінцевого значення відповідно, далі другий раз змінюють інерційність нелінійної сильно дисипативної коливальної системи і проводять вищевказану сукупність операцій по визначенню п'ятого і шостого часових інтервалів і числа циклів (періодів) коливань в цих часових інтервалах при зміні амплітуди вільних затухаючих коливань від її першого початкового значення до першого кінцевого значення, від другого початкового значення до другого кінцевого значення відповідно, який **відрізняється** тим, що додатково формують першу групу "N-1" режимів вільних затухаючих коливань сильно дисипативної коливальної системи, в першій групі "N-1" режимів задають перше початкове і перше кінцеве значення амплітуди вільних затухаючих коливань нелінійної сильно дисипативної коливальної системи і проводять вимір і фіксацію множини "N-1" перших часових інтервалів і числа "N-1" циклів коливань в цих часових інтервалах при зміні амплітуди вільних затухаючих коливань від першого початкового до першого кінцевого значення, окрім цього додатково формують другу групу "N-1"режимів вільних затухаючих коливань, в другій групі "N-1" режимів задають друге початкове і друге кінцеве значення амплітуди вільних затухаючих коливань нелінійної сильно дисипативної коливальної системи і проводять вимір і фіксацію множини "N-1" других часових інтервалів і числа "N-1" циклів коливань в цих часових інтервалах при зміні амплітуди вільних затухаючих коливань від її другого початкового значення до другого кінцевого значення, після першої зміни інерційності нелінійної сильно дисипативної коливальної системи формують третю групу "N-1" режимів вільних затухаючих коливань, в третій групі "N-1" режимів задають перше початкове і перше кінцеве значення амплітуди вільних затухаючих коливань нелінійної сильно дисипативної коливальної системи і проводять вимір і фіксацію множини "N-1" третіх часових інтервалів і числа "N-1" циклів коливань в цих часових інтервалах при зміні амплітуди вільних затухаючих коливань від її першого початкового значення до першого кінцевого значення, після першої зміни інерційності нелінійної сильно дисипативної коливальної системи формують четверту групу "N-1" режимів вільних затухаючих коливань, в четвертій групі "N-1" режимів задають друге початкове і друге кінцеве значення амплітуди вільних затухаючих коливань нелінійної сильно дисипативної коливальної системи і проводять вимір і фіксацію множини "N-1" четвертих часових інтервалів і числа "N-1" циклів коливань в цих часових інтервалах при зміні амплітуди вільних затухаючих коливань від її другого початкового значення до другого кінцевого значення, після другої зміни інерційності нелінійної сильно дисипативної коливальної системи формують п'яту групу "N-1" режимів вільних затухаючих коливань, в п'ятій групі "N-1" режимів задають перше початкове і перше кінцеве значення амплітуди вільних затухаючих коливань нелінійної сильно дисипативної коливальної системи і проводять вимір і фіксацію множини "N-1" п'ятих часових інтервалів і числа "N-1" циклів коливань в цих часових інтервалах при зміні амплітуди вільних затухаючих коливань від її першого початкового значення до першого кінцевого значення, після другої зміни інерційності нелінійної сильно дисипативної коливальної системи формують шосту групу "N-1" режимів вільних затухаючих коливань, в шостій групі "N-1" режимів задають друге початкове і друге кінцеве значення амплітуди вільних затухаючих коливань нелінійної сильно дисипативної коливальної системи і проводять вимір і фіксацію множини "N-1" шостих часових інтервалів і числа "N-1" циклів коливань в цих часових інтервалах при зміні амплітуди вільних затухаючих коливань від її другого початкового значення до другого кінцевого значення, а оцінки інерційно-жорсткісних і дисипативних параметрів нелінійної сильно дисипативної коливальної системи визначають із співвідношень:

$$\hat{m} = \frac{\Delta_1 m \Delta_2 m\left(\hat{\overline{\overline{\omega}}}_1^{\,2} - \hat{\overline{\omega}}_1^{\,2}\right)}{\left(\hat{\overline{\omega}}_1^{\,2}\Delta_2 m - \hat{\overline{\overline{\omega}}}_1^{\,2}\Delta_1 m\right)},$$

$$\hat{c} = \frac{\hat{m}^2\hat{\overline{\omega}}_1^{\,2}}{\Delta_1 m}\left(1 + \frac{\Delta_1 m}{\hat{m}}\right) \text{ або } \hat{c} = \frac{\hat{m}^2\hat{\overline{\overline{\omega}}}_1^{\,2}}{\Delta_2 m}\left(1 + \frac{\Delta_2 m}{\hat{m}}\right),$$

$$\hat{\omega}_0^2 = \frac{\hat{c}}{\hat{m}} = \frac{\hat{m}\hat{\overline{\omega}}_1^{\,2}}{\Delta_1 m}\left(1 + \frac{\Delta_1 m}{\hat{m}}\right) \text{ або } \hat{\omega}_0^2 = \frac{\hat{m}\hat{\overline{\overline{\omega}}}_1^{\,2}}{\Delta_2 m}\left(1 + \frac{\Delta_2 m}{\hat{m}}\right);$$

$$\hat{b} = 2\hat{m}\sqrt{\hat{\omega}_0^2 - \hat{\omega}_1^2}$$

або $\hat{b} = 2\left(\hat{m} + \Delta_1 m\right)\sqrt{\hat{\omega}_0^2 - \hat{\overline{\omega}}_1^{\,2}}$,

або $\hat{b} = 2\left(\hat{m} + \Delta_2 m\right)\sqrt{\hat{\omega}_0^2 - \hat{\overline{\overline{\omega}}}_1^{\,2}}$;

$$\hat{h} = \frac{\hat{b}}{2\hat{m}} = \sqrt{\hat{\omega}_0^2 - \hat{\omega}_1^2}$$

або $\hat{\overline{h}} = \dfrac{\hat{b}}{2\left(\hat{m} + \Delta_1 m\right)}$,

або $\hat{\overline{\overline{h}}} = \dfrac{\hat{b}}{2\left(\hat{m} + \Delta_2 m\right)}$,

де $\hat{\omega}_1 = \sqrt{\hat{c}\hat{m}^{-1} - \hat{h}^2}$, $\hat{\overline{\omega}}_1 = \sqrt{\hat{c}\left(\hat{m} + \Delta_1 m\right)^{-1} - \hat{\overline{h}}^2}$, $\hat{\overline{\overline{\omega}}}_1 = \sqrt{\hat{c}\left(\hat{m} + \Delta_2 m\right)^{-1} - \hat{\overline{\overline{h}}}^2}$,

$$\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}^2 t\left(\sum_{i=1}^{N}n_{2i}\Delta_{2i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}t - \sum_{i=1}^{N}n_{4i}\Delta_{4i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}t\right) -$$

$$\hat{\omega}_1 = 2\pi \frac{-\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}^2 t\left(\sum_{i=1}^{N}n_{1i}\Delta_{1i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{3i}\Delta_{3i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}t\right)}{\left(\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}^2 t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}^2 t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}t-\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}^2 t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}^2 t\right)}$$

або

$$\hat{\omega}_1 = 2\pi \frac{\left[\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}^2 t\left(\sum_{i=1}^{N}n_{2i}\Delta_{2i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{6i}\Delta_{6i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}t\right)-\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}^2 t\left(\sum_{i=1}^{N}n_{1i}\Delta_{1i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{5i}\Delta_{5i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}t\right)\right]}{\left(\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}^2 t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}^2 t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}t-\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}^2 t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}^2 t\right)}$$

$$\hat{\bar{\omega}}_1 = 2\pi \frac{\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}^2 t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}t\left(\sum_{i=1}^{N}n_{2i}\Delta_{2i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{4i}\Delta_{4i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}t\right)-\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}^2 t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}t\left(\sum_{i=1}^{N}n_{1i}\Delta_{1i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{3i}\Delta_{3i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}t\right)}{\left(\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}^2 t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}^2 t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}t-\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}^2 t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}^2 t\right)}$$

або

$$\hat{\bar{\omega}}_1 = 2\pi \frac{\left[\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}^2 t\left(\sum_{i=1}^{N}n_{4i}\Delta_{4i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{6i}\Delta_{6i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}t\right)-\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}^2 t\left(\sum_{i=1}^{N}n_{3i}\Delta_{3i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{5i}\Delta_{5i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}t\right)\right]}{\left(\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}^2 t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}^2 t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}t-\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}^2 t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}^2 t\right)}$$

$$\hat{\bar{\bar{\omega}}}_1 = 2\pi \frac{\left[\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}^2 t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}t\left(\sum_{i=1}^{N}n_{2i}\Delta_{2i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{6i}\Delta_{6i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}t\right)-\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}^2 t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}t\left(\sum_{i=1}^{N}n_{1i}\Delta_{1i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{5i}\Delta_{5i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}t\right)\right]}{\left(\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}^2 t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}^2 t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}t-\sum_{i=1}^{N}\Delta_{1i}^2 t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{2i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}^2 t\right)}$$

або

$$\hat{\bar{\bar{\omega}}}_1 = 2\pi \frac{\left[\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}^2 t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}t\left(\sum_{i=1}^{N}n_{4i}\Delta_{4i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{6i}\Delta_{6i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}t\right)-\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}^2 t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}t\left(\sum_{i=1}^{N}n_{3i}\Delta_{3i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}t-\sum_{i=1}^{N}n_{5i}\Delta_{5i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}t\right)\right]}{\left(\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}^2 t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}^2 t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}t-\sum_{i=1}^{N}\Delta_{3i}^2 t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{4i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{5i}t\sum_{i=1}^{N}\Delta_{6i}^2 t\right)},$$

$\Delta_1 m$, $\Delta_2 m$ ($\Delta_1 m \neq \Delta_2 m$, $\Delta_1 m \ll \hat{m}$, $\Delta_2 m \ll \hat{m}$) - перша і друга додаткові маси;

$\hat{h} = \frac{\hat{b}}{2\hat{m}}$, $\hat{\bar{h}} = \frac{\hat{b}}{2(\hat{m}+\Delta_1 m)}$, $\hat{\bar{\bar{h}}} = \frac{\hat{b}}{2(\hat{m}+\Delta_2 m)}$;

$n_{1i}$, $n_{2i}$ ($i = 1,2,...,N$) - перша і друга групи чисел циклів затухаючих коливань маси "$m$" при зміні амплітуди затухаючих коливань від першого початкового значення $X_{\alpha 1}$ до першого кінцевого значення $X_{\alpha 2}$, від другого початкового значення $X_{\alpha 3}$ до другого кінцевого значення $X_{\alpha 4}$ відповідно;

$\Delta_{1i}t$, $\Delta_{2i}t$ - перша і друга групи часових інтервалів, що відповідають першій і другій групам чисел $n_{1i}$, $n_{2i}$ циклів коливань;

$n_{3i}$, $n_{4i}$ третя і четверта групи чисел циклів затухаючих коливань маси $(m+\Delta_1 m)$ при зміні амплітуди затухаючих коливань від першого початкового значення $X_{\alpha 1}$ до першого кінцевого значення $X_{\alpha 2}$, від другого початкового значення $X_{\alpha 3}$ до другого кінцевого значення $X_{\alpha 4}$ відповідно;

$\Delta_{3i}t$, $\Delta_{4i}t$ - третя і четверта групи часових інтервалів, що відповідають третій і четвертій групам чисел $n_{3i}$, $n_{4i}$ циклів коливань;

$n_{5i}$, $n_{6i}$ - п'ята і шоста групи чисел циклів затухаючих коливань маси $(m+\Delta_2 m)$ при зміні амплітуди затухаючих коливань від першого початкового значення $X_{\alpha 1}$ до першого кінцевого значення $X_{\alpha 2}$, від другого початкового значення $X_{\alpha 3}$ до другого кінцевого значення $X_{\alpha 4}$ відповідно;

$\Delta_{5i}t$, $\Delta_{6i}t$ - п'ята і шоста групи часових інтервалів, що відповідають п'ятій і шостій групам чисел $n_{5i}$, $n_{6i}$ циклів коливань.

Комп'ютерна верстка В. Мацело

Державна служба інтелектуальної власності України, вул. Урицького, 45, м. Київ, МСП, 03680, Україна

ДП "Український інститут промислової власності", вул. Глазунова, 1, м. Київ – 42, 01601